

Problemas de contorno o valores de frontera (PVF)

$$x'' = f(t, x, x') \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

$$x(a) = v \quad y \quad x(b) = w$$

Son EDOs de segundo orden, donde se conocen los valores de la función en los extremos del intervalo.

Ej. : Problemas de deflexión de una viga con los extremos sujetos.

Posible solución: Descomponer en un sistema de dos ecuaciones de valor inicial. El problema es que se desconoce la derivada en el valor inicial

Método del disparo

Si se desconoce el valor inicial, se intenta establecer el valor de la derivada en el punto inicial

- Estimar un valor inicial para $x(a)'$, "ángulo de disparo". Si se desconoce el problema como para estimarlo, será un valor arbitrario.

$$d1 = x(a)'^{(1)}$$

- Calcular $x(b)^{(1)}$ en el sistema por los métodos clásicos de PVI

- Corregir el "ángulo de disparo",

$$d2 = x(a)'^{(2)}$$

- Calcular $x(b)^{(2)}$

- Obtener una mejora $d = x(a)'^{(3)}$ mediante interpolación lineal de los $x(b)$ y obtener un nuevo $x(b)^{(3)}$.

$$d3 = d1 + \frac{y(1) - y(1)^{(1)}}{y(1)^{(2)}} d2$$

- Repetir hasta encontrar una aproximación adecuada de $x(b)^{(i)}$ a w

Ejemplo

$$\begin{cases} y''(x) = y & \text{para } 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 & h = 0.1 \\ y(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Aplicando ode45

con un $z(0) = d1 = 1.5$

$y(1)^{(1)} = 1.7628$

Con $z(0) = d2 = 2.5$

$y(1)^{(2)} = 2.9380$

$$d3 = d1 + \frac{y(1) - y(1)^{(1)}}{y(1)^{(2)}} d2$$

$$= 1.5 + \frac{2 - 1.7628}{2.9380} 2.5 = 1.7018$$

Con $z(0) = d3 = 1.7018$

$y(1)^{(3)} = 2$

Var. Independiente Vector de edo's

function dydx = ej(x,y)

dydx = [y(1); y(2)];

$$y' = z = y(1)$$

$$z' = y = y(2)$$

>> [x,y] = ode45(@ej,[0:0.1:1],[1.5; 0]);

>> [x,y] = ode45(@ej,[0:0.1:1],[2.5; 0])

>> [x,y] = ode45(@ej,[0:0.1:1],[1.7018; 0])

x	y(1)		y(2)		y(1)		y(2)		y(1)		y(2)	
	z	y	z	y	z	y	z	y	z	y	z	y
0	1.5000	0	2.5000	0	1.7018	0						
0.1000	1.5075	0.1503	2.5125	0.2504	1.7103	0.1705						
0.2000	1.5301	0.3020	2.5502	0.5033	1.7359	0.3426						
0.3000	1.5680	0.4568	2.6133	0.7613	1.7790	0.5182						
0.4000	1.6216	0.6161	2.7027	1.0269	1.8398	0.6990						
0.5000	1.6914	0.7816	2.8191	1.3027	1.9190	0.8868						
0.6000	1.7782	0.9550	2.9637	1.5916	2.0174	1.0835						
0.7000	1.8828	1.1379	3.1379	1.8965	2.1360	1.2910						
0.8000	2.0062	1.3322	3.3436	2.2203	2.2760	1.5114						
0.9000	2.1496	1.5398	3.5827	2.5663	2.4388	1.7469						
1.0000	2.3146	1.7628	3.8577	2.9380	2.6260	2.0000						

Método de las diferencias finitas

Se reemplazan todas las derivadas de primer orden (x') y de segundo orden (x'') por diferencias centralizadas en cada uno de los puntos a calcular,

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{2h}$$

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2}$$

obteniéndose un sistema de ecuaciones con incógnitas $x(t_k)$.

Ejemplo

$y''(x) = y$ para $0 < x < 1$
 $y(0) = 0$
 $y(1) = 2$
 $h = 0.1$

Reemplazando

$$\frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} = y(x_j)$$

$\frac{y(0.2) - 2y(0.1) + y(0)}{(0.1)^2} = y(0.1)$
 $\frac{y(0.3) - 2y(0.2) + y(0.1)}{(0.1)^2} = y(0.2)$
 $\vdots$
 $\frac{y(1) - 2y(0.9) + y(0.8)}{(0.1)^2} = y(0.9)$

1					$y(0)$	0
1	-2.01	1			$y(0.1)$	0
		1	-2.01	1	$y(0.2)$	0
			$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
				1	$y(1)$	2

x	y
0	0
0.1000	0.1705
0.2000	0.3427
0.3000	0.5183
0.4000	0.6991
0.5000	0.8869
0.6000	1.0836
0.7000	1.2911
0.8000	1.5115
0.9000	1.7470
1.0000	2.0000

Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)

Ecuaciones diferenciales donde aparecen dos o más variables independientes.

Aplicables en distintos tipos de cálculos técnicos

Son probablemente las ecuaciones de mayor interés para la física-matemática y sus aplicaciones en ingeniería. Una de las más conocidas y útiles es la famosa ecuación de Laplace, que apareció por primera vez en la teoría newtoniana de la atracción gravitacional.

También aparecen en las teorías de elasticidad, sonido, luz, calor, electromagnetismo y del movimiento de fluidos.

Básicamente hay tres tipos de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden aplicadas en una o más dimensiones.

- Ecuación de calor (o de difusión).
- Ecuación de onda.
- Otros sistemas físicos (Ec. Laplace, Ec. Poisson).

Para dos variables independientes, tales ecuaciones pueden expresarse en forma general como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Si $B^2 - 4AC < 0$ **Elíptica**: Ecuación de Laplace

Si $B^2 - 4AC = 0$ **Parabólica**: Ecuación de calor

Si $B^2 - 4AC > 0$ **Hiperbólica**: Ecuación de onda

Método de las diferencias finitas

Método de las diferencias finitas centradas para x' :

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{2h}$$

Método de las diferencias finitas hacia adelante para x'

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{h}$$

Método de las diferencias finitas hacia atrás para x'

$$x'(t_j) = \frac{x(t_j) - x(t_{j-1}))}{h}$$

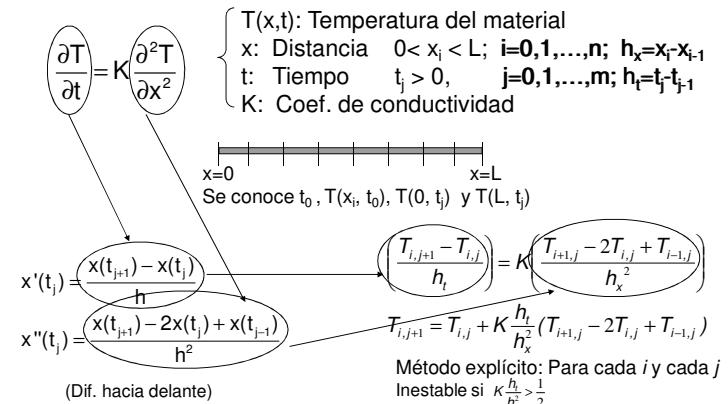
Método de las diferencias finitas para x'' :

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2}$$

Parabólica: Ecuación del calor o de difusión

Variable de tiempo con una dimensión espacial

Ej.: Flujo de calor en un alambre aislado.



Método implícito: Aplicando diferencias hacia atrás

$$\left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_t} \right) = K \left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_x^2} \right)$$

Comenzando desde i, j .

$$T_{i,j-1} = \left(1 + 2K \frac{h_t}{h_x^2} \right) T_{i,j} - K \frac{h_t}{h_x^2} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j})$$

$$\text{si } a = K \frac{h_t}{h_x^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1+2a & -a & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1+2a & -a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a & 1+2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,j} + aT_{0,j} \\ T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ \vdots \\ T_{n-1,j} + aT_{n,j} \end{bmatrix}$$

Para cada j

Ejemplo

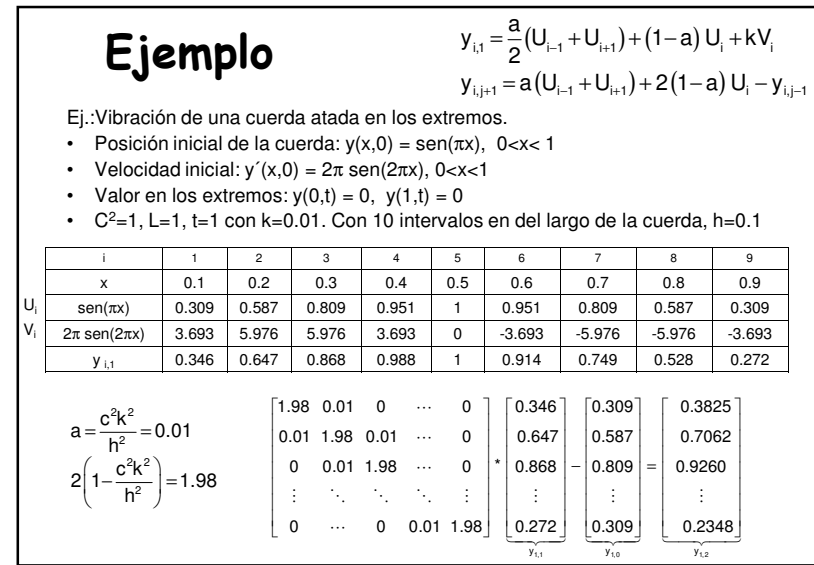
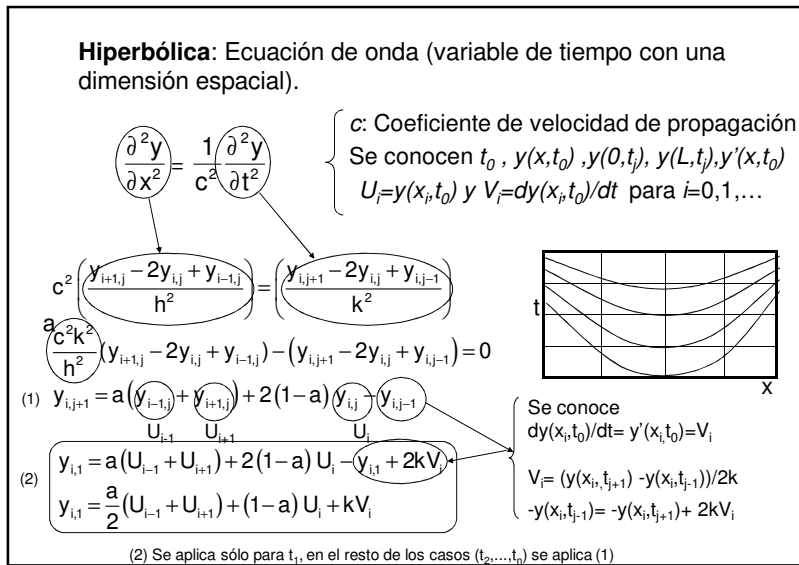
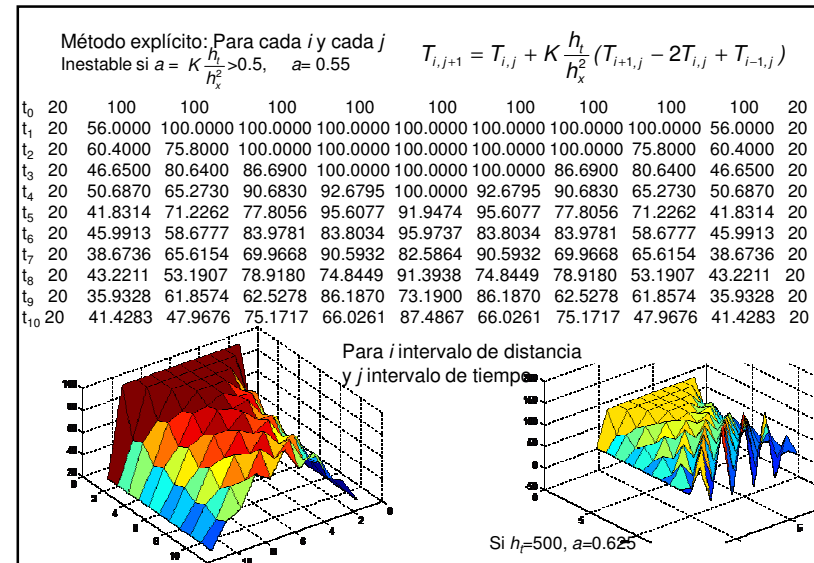
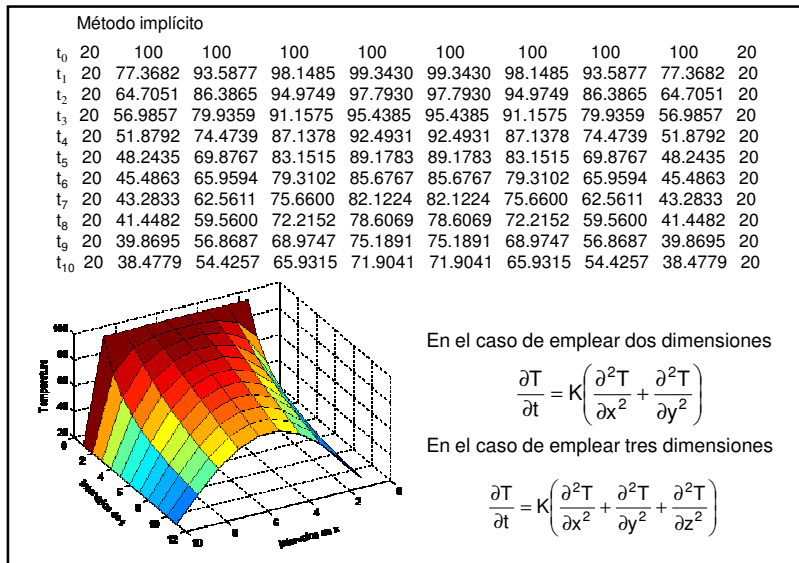
Una pared de 0.2m de espesor se encuentra inicialmente a 100°C. Su tasa de transferencia de calor es de $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Si la temperatura en ambas superficies se baja repentinamente a 20°C y se mantiene constante. Cuál es la variación a través de la pared en intervalos de 440s?

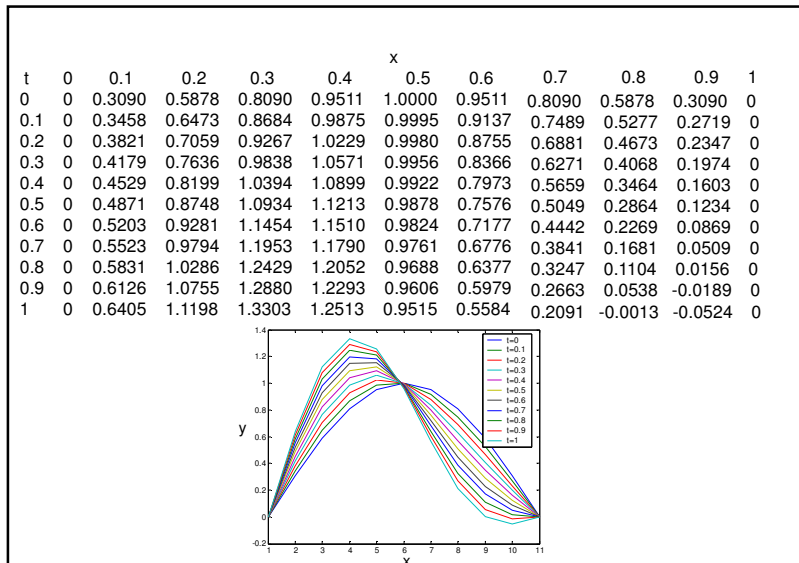
$$a = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 440 / 0.02^2 = 0.55 \quad (10 \text{ intervalos en } x \text{ y } 10 \text{ en } t)$$

$$1+2a = 2.1$$

$$t_1: \begin{bmatrix} 2.1 & -0.55 & & & \\ -0.55 & 2.1 & -0.55 & & \\ & -0.55 & 2.1 & -0.55 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -0.55 & 2.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 20 \cdot .55 \\ 100 \\ 100 \\ \vdots \\ 100 + 20 \cdot .55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.3682 \\ 93.5877 \\ 98.1485 \\ \vdots \\ 77.3682 \end{bmatrix}$$

$$t_2: \begin{bmatrix} 2.1 & -0.55 & & & \\ -0.55 & 2.1 & -0.55 & & \\ & -0.55 & 2.1 & -0.55 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -0.55 & 2.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+2} \\ T_{2,j+2} \\ T_{3,j+2} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.3682 + 20 \cdot .55 \\ 93.5877 \\ 98.1485 \\ \vdots \\ 77.3682 + 20 \cdot .55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{1,j+2} \\ T_{2,j+2} \\ T_{3,j+2} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.7051 \\ 86.3865 \\ 94.9749 \\ \vdots \\ 64.7051 \end{bmatrix}$$





Elíptica: Distribución de temperatura en un plano.

Ej.: Ecuación de Laplace.

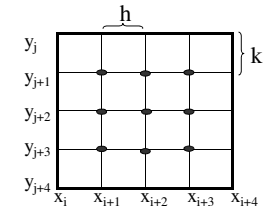
En estado estable con dos dimensiones espaciales.

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Si $h=k$

$$\left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} \right) + \left(\frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2} \right) = 0$$

$$(T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/h^2 = 0$$



Aplicable a 3 dimensiones $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

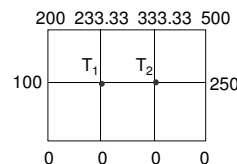
Ecuación de Poisson: $\nabla^2 z = F(x, y)$

Ecuación de Helmholtz: $\nabla^2 z + G(x, y)z = F(x, y)$

Ejemplo

Determinar la distribución de temperatura en un plano, sujeto a la siguientes temperaturas en sus bordes:

$x=0$: $T=100$; $x=3$: $T=250$; $y=0$: $T=0$; $y=2$: $T=200 + (100/3)x^2$



$$(T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/h^2 = 0$$

$$(T_2 - 4T_1 + 100 + 233.33 + 0)/h^2 = 0$$

$$(250 - 4T_2 + T_1 + 333.33 + 0)/h^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -333.33 \\ -583.33 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = 127.78 \text{ y } T_2 = 177.78$$

Comandos Matlab

Pdepe EDP parabólicas y elípticas

`sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options,p1,p2,...)`

- m** Simetría del problema. m puede ser: 0=plano, 1=cilindro, o 2=esfera.
- pdefun** Función del EDP.
- icfun** Función para las condiciones iniciales.
- bcfun** Función para las condiciones de frontera.
- xmesh** Vector $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ con los puntos en los cuales son requeridos los valores.
- tspan** Vector $[t_0, t_1, \dots, t_f]$ con los tiempos requeridos
- options** ver `odeset`.
- p1,p2,...** Parameters opcionales para `pdefun`, `icfun` y `bcfun`